問題２４

（１）α, β, γ がこの順に等差数列であり、$\sin\alpha,\ \sin\beta,\ \sin\gamma$ がこの順に等比数列であるのはどのようなときか。　［京都大学（1975）文系第３問］

（２）角 α, β, γ が、$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ, \alpha \geq 0^\circ, \beta \geq 0^\circ, \gamma \geq 0^\circ$ を満たすとき、

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \geq 1$$

を示せ。　［京都大学（2005）後期文系第３問］

（１）（解答例）α, β, γ がこの順に等差数列であるから

$$2\beta = \alpha+\gamma$$

$\sin\alpha,\ \sin\beta,\ \sin\gamma$ がこの順に等比数列であるから

$$\sin^2\beta = \sin\alpha\sin\gamma$$

すると、

$$\sin^2\beta = \sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2} = \sin\alpha\sin\gamma$$

半角の公式と積和公式から

$$1-\cos(\alpha+\gamma) = 2\sin\alpha\sin\gamma = \cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)$$

これより

$$\cos(\alpha-\gamma)=1$$

すると、

$$\alpha-\gamma = 2n\pi, \qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

このとき、α, β, γ は公差 $-n\pi$ の等差数列であり、$\sin\alpha,\ \sin\beta,\ \sin\gamma$ は公比 $(-1)^n$ の等比数列である。

（２）（解答例１）

$$
\begin{aligned}
& \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \\
= \ & 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2} \\
= \ & 2\cos\frac{180^\circ-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2} \\
= \ & 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2} \\
= \ & 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{2\alpha-(180^\circ-\gamma)}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2} \\
= \ & 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{-2\alpha+(180^\circ-\gamma)}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2} \\
= \ & 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\left(90^\circ-\alpha-\frac{\gamma}{2}\right)+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2} \\
= \ & 2\sin\frac{\gamma}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}
\end{aligned}
$$

$$\frac{\gamma}{2}\leq\alpha+\frac{\gamma}{2}\leq(180^\circ-\gamma)+\frac{\gamma}{2}=180^\circ-\frac{\gamma}{2}$$

であるから、

$$\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\geq\sin\frac{\gamma}{2}\geq 0$$

すると、

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geq 2\sin^2\frac{\gamma}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}\geq 1$$

である。■

（２）（解答例２）たとえば $\alpha=0^\circ$ とすると、$\beta+\gamma=180^\circ$ であるから

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\cos\beta+\cos(180^\circ-\beta)=1+\cos\beta-\cos\beta=1$$

である。$\beta=0^\circ$ でも、$\gamma=0^\circ$ でも、$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$ である。

以下、$\alpha>0^\circ,\beta>0^\circ,\gamma>0^\circ$ とする。

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$

から、三角形 ABC で

$$\angle\mathrm{A}=\alpha,\ \angle\mathrm{B}=\beta,\ \angle\mathrm{C}=\gamma$$

となるものが存在する。

$$a=\mathrm{BC},\ b=\mathrm{CA},\ c=\mathrm{AB}$$

とする。余弦定理から

$$\begin{aligned}
& \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1 \\
= & \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-1 \\
= & \frac{1}{2abc}(ab^2+ac^2+bc^2+a^2b+a^2c+b^2c-a^3-b^3-c^3-2abc)
\end{aligned}$$

分子を因数分解する。

$$\begin{aligned}
& -a^3+(b+c)a^2+(b^2+c^2-2bc)a+bc(b+c)-(b^3+c^3) \\
= & -a^3+(b+c)a^2+(b-c)^2a-(b+c)(b-c)^2 \\
= & a^2(b+c-a)-(b-c)^2(b+c-a) \\
= & (b+c-a)(a^2-(b-c)^2 \\
= & (b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)
\end{aligned}$$

三角形の成立条件から

$$b+c-a>0,\ \ a-b+c>0,\ \ a+b-c>0$$

であるから、

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1>0$$

である。■

（２）（解答例３）

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \tag{1}$$

を示す。

　和積公式から

$$\begin{aligned}
\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
&= 2\cos\frac{180^\circ-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
&= 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

半角の公式から

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= 1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}\\ &= 1-2\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{180^\circ-(\alpha+\beta)}{2}\\ &= 1-2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\end{aligned}$$

すると、

$$\begin{aligned}&\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\\ =\;& 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\ =\;& 2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\ =\;& 4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

から (1) が得られる。

$$0^\circ \le \frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2} \le 90^\circ$$

であるから、

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} \ge 0$$

である。すなわち、

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1 \ge 0$$

である。■