問題１８

n を自然数とする。xy 平面内の、原点を中心とする半径 n の円の、内部と周をあわせたものを C_n であらわす。次の条件（＊）を満たす１辺の長さが１の正方形の数を $N(n)$ とする。

（＊）正方形の４頂点はすべて C_n に含まれ、４頂点の x および y 座標はすべて整数である。

このとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n^2}=\pi$ を証明せよ。

［京都大学（2004）後期理系第６問］

（解答例１）第１象限に属する（＊）を満たす１辺の長さが１の正方形の数 $N(n)$ は

$$\frac{1}{4}N(n)=\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{n^2-k^2}\,]$$

である。すると、

$$4\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{n^2-k^2}-1)<N(n)\leq 4\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$$

$$\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}-\frac{4}{n}<\frac{N(n)}{n^2}\leq\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

区分求積法から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}$$

であるから、はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n^2}=\pi$$

である。■

（解答例２）条件（＊）を満たす１辺の長さが１の正方形からなる領域を $R(n)$ とする。すると、$N(n)$ は $R(n)$ の面積に一致する。第１象限に属する（＊）を満たす１辺の長さが１の正方形の４頂点の座標は

$$(k-1, i-1),\ (k, i-1),\ (k-1, i),\ (k, i)$$

である。ただし、k と i の範囲は

$$1 \leq k \leq n-1,\ \ 1 \leq i \leq [\sqrt{n^2-k^2}\,]$$

である。$0 < r < n$ を整数とし、原点を中心とする半径 r の円の、内部と周をあわせたものを C_r とする。C_r が領域 $R(n)$ に含まれるには、任意の $k = 1, 2, \ldots, r$ で

$$\sqrt{r^2-(k-1)^2} \leq i_k \leq \sqrt{n^2-k^2}$$

を満たす整数が存在すればよい。すなわち

$$\sqrt{n^2-k^2} - \sqrt{r^2-(k-1)^2} \geq 1, \quad k = 1, 2, \ldots, r$$

であればよい。

$$n^2-k^2 \geq r^2-(k-1)^2+2\sqrt{r^2-(k-1)^2}+1, \quad k = 1, 2, \ldots, r$$

$$n^2 \geq r^2+2k-1+2\sqrt{r^2-(k-1)^2}+1, \quad k = 1, 2, \ldots, r$$

$$n^2 \geq r^2+2k+2\sqrt{r^2-(k-1)^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, r$$

任意の $k = 1, 2, \ldots, r$ で

$$r^2+2k+2\sqrt{r^2-(k-1)^2} < r^2+2r+2\sqrt{r^2} = r^2+4r$$

であるから、

$$n^2 \geq r^2+4r$$

であればよい。すると、$r = n-2$ であればよい。すると、

$$\pi(n^2-4n+4) \leq N(n) \leq \pi\, n^2$$

であるから、

$$\pi\left(1-\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}\right) \leq \frac{N(n)}{n^2} \leq \pi$$

すると、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n^2} = \pi$$

である。■