

問題 16 (a)

xyz 空間において体積が 1 よりも大きい図形 D がある。 xyz 空間の体積が 1 の単位立方体を C_0 とする。すなわち、 C_0 は、頂点が $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ である立方体である。単位立方体を整数を成分とするベクトルで平行移動して得られる立方体を基本立方体と呼ぶ。 D を有限個の異なる基本立方体 C_1, C_2, \dots, C_q で覆う。 $D_i = D \cap C_i$ と置き、 C_i 平行移動し、 C_0 に重なるようにするとき、 $D_i = D \cap C_i$ が $D'_i \subset C_0$ に移るとする。

- (i) $D'_i \cap D'_j \neq \emptyset$ となる $1 \leq i < j \leq q$ が存在することを示せ。
- (ii) D は、 x 座標、 y 座標、 z 座標の差が、それぞれ、整数となるような異なる 2 点を含む。これを示せ。

問題 16 (b)

xyz 空間において体積が 8 よりも大きい図形 D が、原点对称で、しかも凸ならば、 D は原点以外の格子点を含む。問題 16 (a) の (ii) を使い、これを示せ。