問題３

（１）　任意の整数 $N > 1$ について、連続する N 個の自然数で、そのどれもが素数でないものが存在する。これを示せ。

（２）　xy 平面上の点 (a, b) は、a と b がともに整数のとき格子点と呼ばれる。xy 平面において、3 つの頂点がすべて格子点である鋭角三角形で面積 $\dfrac{1}{2}$ のものは存在しない。これを証明せよ。

（１）（解答例）連続する N 個の自然数を

$$M + 2, M + 3, \ldots, M + (N + 1) \tag{1}$$

と置く。これらが素数とならないようにするには、M が $2 \cdot 3 \cdots N \cdot (N + 1)$ で割り切れればよいから、$M = (N + 1)!$ とすればよい。すなわち、連続する N 個の自然数

$$(N + 1)! + 2, (N + 1)! + 3, \ldots, (N + 1)! + (N + 1)$$

は、どれも素数ではない。■

（２）（解答例１）鋭角三角形 ABC の 3 個の角を

$$\angle\mathrm{ABC} \leq \angle\mathrm{BCA} \leq \angle\mathrm{CAB}$$

とし、$\angle\mathrm{CAB} = \theta$ と置く。三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}bc\sin\theta$$

である。$b = \mathrm{AC}$ と $c = \mathrm{AB}$ は xy 平面における格子点と格子点の距離だから、それらの値は、

$$1,\ \sqrt{2},\ 2,\ \sqrt{5},\ \ldots$$

となる。特に、鋭角三角形であるから $bc \geq \sqrt{2}$ となる。また、$\dfrac{\pi}{3} \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ から、$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\theta < 1$ である。すると、

$$\frac{1}{2}bc\sin\theta \geq \frac{\sqrt{6}}{4} > \frac{1}{2}$$

となる。■

（２）（解答例２）鋭角三角形 OAB の頂点を $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(a,b), \mathrm{B}(c,d)$ とする。鋭角三角形であるから、ベクトルの内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ は、いずれも正である。

$$\begin{array}{rcl} ac+bd & > & 0 \\ (a^2+b^2)-(ac+bd) & > & 0 \\ (c^2+d^2)-(ac+bd) & > & 0 \end{array}$$

いま、$ac+bd=q$ とすると、整数条件から $q \geq 1$ である。しかも

$$a^2+b^2 \geq q+1, \quad c^2+d^2 \geq q+1$$

である。すると

$$\begin{array}{rcl} (ad-bc)^2 & = & (a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 \\ & \geq & (q+1)^2-q^2 = 2q+1 \geq 3 \end{array}$$

となるから、三角形 OAB の面積は

$$\frac{1}{2}|ad-bc| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$$

となる。■